CORRECCIÓN EXAMEN 15-V-2012

(1)

$S_T = 54\,m^2 = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Función a optimizar: $V(r,h) = \pi r^2 h$.

Despejamos h en S_T y obtenemos:

$$h = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Sustituyendo en la función V:

$$V(r) = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = 27r - \pi r^3$$

Derivamos V respecto a r:

$$\frac{dV}{dr} = 27 - 3\pi r^2$$

y calculamos sus extremos relativos, igualando a cero:

$$V' = 0 \Rightarrow 27 - 3\pi r^2 = 0 \quad r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi}$$

$$r = \pm\sqrt{\frac{9}{\pi}} = \pm\frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

Evidentemente, $r > 0$, por tanto comprobamos el signo de V'' con $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ (m)

$V'' = -6\pi r$, que es negativo para este valor del radio, por tanto tendrá un máximo pa

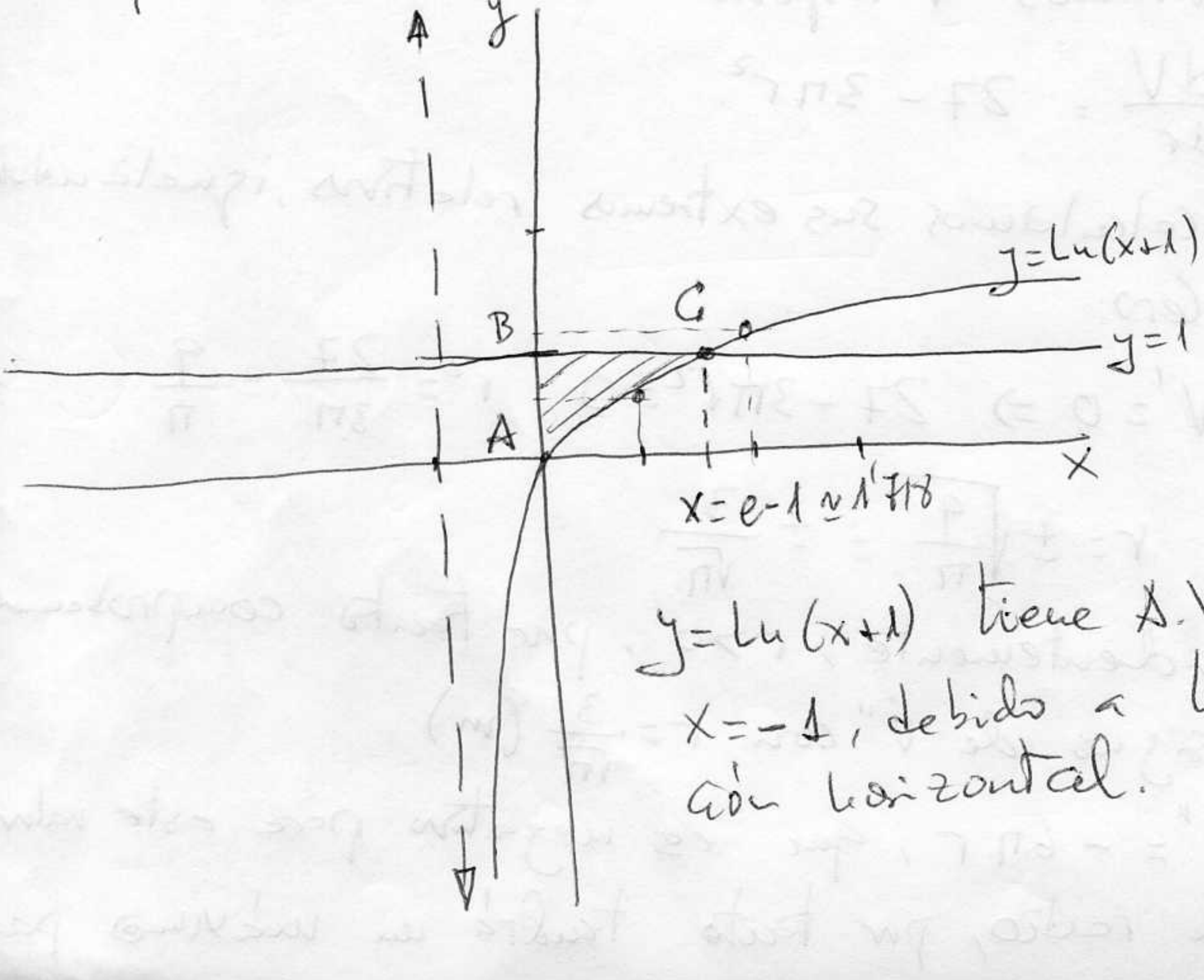
ra ese valor.

$$h = \frac{54-2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{54 - 2\pi \cdot \frac{9}{\pi}}{2\pi \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}}} = \frac{54-18}{6\sqrt{\pi}} = \frac{36}{6\sqrt{\pi}} = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ m}$$

$\boxed{\text{Las dimensiones del cilindro serán, por tanto: } r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \text{ (m) y } h = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \text{ (m).}}$

2.- $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = Ln(x+1)$

a) Esbozo. $f(x)$ es la traslación horizontal de la función $y = Ln\, x$, la recta $y=1$ es una recta horizontal. Así, el esbozo gráfico de este problema es:



x	y
0	0
1	$Ln(2) \approx 0$
2	$Ln(3) \approx 1'1$

$y = Ln(x+1)$ tiene A.V. en $x=-1$, debido a la traslación horizontal.

El punto de corte de las gráficas (G) lo obtenemos mediante el sist. de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln(x+1) \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(x+1) = 1;\ x+1 = e;\ \boxed{x = e-1}$$

Así, el recinto pedido está formado por un triángulo mixtilíneo de vértices:

$A(0,0)$, $B(0,1)$ y $C(e-1, 1)$

b) Para calcular el área del recinto ABC anterior únicamente necesitamos hacer la integral definida:

$$S = \int_0^{e-1} [g(x) - f(x)]\, dx, \text{ siendo } \left\{\begin{array}{l} g(x) = 1 \\ f(x) = \ln(x+1) \end{array}\right.$$

Así:

$$S = \int_0^{e-1} [1 - \ln(x+1)]\, dx = \int_0^{e-1} dx - \underbrace{\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx}_{I_1}$$

Resolvemos previamente I_1 por el método de integración por partes:

$$I_1 = \int \ln(x+1)\, dx = \left\{\begin{array}{l} u = \ln(x+1);\ du = \frac{1}{x+1}\, dx \\ dv = dx;\ v = x \end{array}\right\} = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}$$

$$= x\ln(x+1) - \int \left[1 + \frac{-1}{x+1}\right] dx = x\ln(x+1) - x - \ln(x+1) + C$$

$$\begin{array}{r|l} x & x+1 \\ \hline -x-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$S' = \left[x - x\ln(x+1) + x + \ln(x+1)\right]_0^{e-1} =$$

$$= \left[e-1 - (e-1)\cdot\ln(e-1+1) + e-1 + \ln(e-\cancel{1}+\cancel{1})\right] -$$

$$- \left[0 - 0\cdot\ln(1) + 0 + \ln(0+1)\right] =$$

$$= \left[2e-2 - (e-1)\cdot\ln e + \ln e\right] = 2e - \cancel{2} - e + \cancel{1} + \cancel{1} =$$

$$= e\ u^2 \Rightarrow \boxed{S' = e\ u^2}$$

(3) $\left.\begin{aligned} -\lambda x + y + z &= 1 \\ x + \lambda y + z &= 2 \\ \lambda x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$

a) Clasificación según λ.

$$A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

rango A: No podemos encontrar ningún menor en A de orden 2 no nulo, comenzamos por estudiar $|A|$ para ver qué valores de λ hacen que $|A|$ valga cero o distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 1 + \lambda - \lambda^2 + \lambda - 1 =$$

$$= -2\lambda^2 + 2\lambda = 2\lambda(-\lambda + 1)$$

Así:

a.1) $\forall \lambda \neq 0, 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ rango $A = 3 \Rightarrow$ rango $A^* = 3$ = nº incógnitas = 3 $\Rightarrow$ Sistema Completo Compatible Determinado $\Rightarrow$ Solución Única.

a.2) $\lambda = 0 \Rightarrow A|A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow F_1 = F_3$

Las ecuaciones 1 y 3 son idénticas, por lo que el sistema podría ser sustituido por otro equivalente: $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{cases}$ de dos ecs. y 3 incógnitas $\Rightarrow$ Sist. Completo Compatible Indeterminado $\Rightarrow$ Gº libertad = 1 $\Rightarrow$ Infinitas soluciones

a.3) $\lambda = 1 \Rightarrow A/A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$

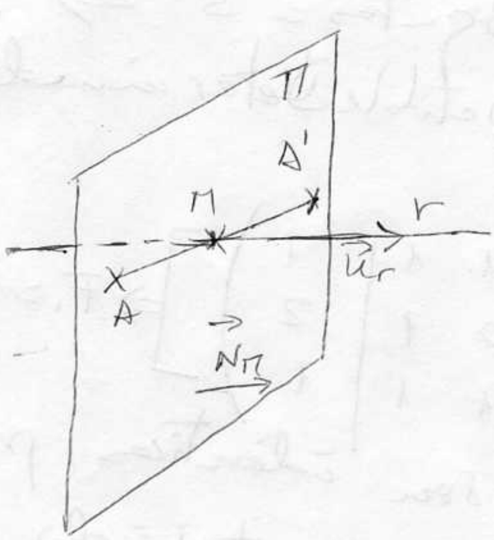
Las ecuaciones 2 y 3 son incompatibles, al diferenciarse únicamente en el t. independiente.

Por tanto, si $\lambda = 1 \Rightarrow$ Sist. Incompatible $\Rightarrow$ NO SOLUCIÓN.

b) $\lambda = 0 \Rightarrow$ Sist. Compatible Indeterminado

$$\left.\begin{array}{r} y + z = 1 \\ x + z = 2 \end{array}\right\} \quad \boxed{\left.\begin{array}{l} y = 1 - z \\ x = 2 - z \\ z = z \end{array}\right\} z \in \mathbb{R}}$$

4



A', simétrico de A respecto a r, se encuentra en un plano π que pasa por A, siendo M (intersección de r y π) el centro de simetría, punto medio del segmento AA'.

$$r \equiv x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{u_r} = (1, 2, 2) = \vec{N_\pi}$$

$$\pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0$$

$$A(-3, 1, 6) \in \pi \Rightarrow -3 + 2 + 12 + D = 0 \; ; \; D + 11 = 0, \; \boxed{D = -11}$$

Calculamos M como intersección de π y r:

Pasemos r a forma paramétrica: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$

y sustituimos en π: $x + 2y + 2z - 11 = 0 \Rightarrow$

$1 + \lambda + 2(-3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - 11 = 0; \quad 9\lambda - 18 = 0; \quad \boxed{\lambda = 2}$

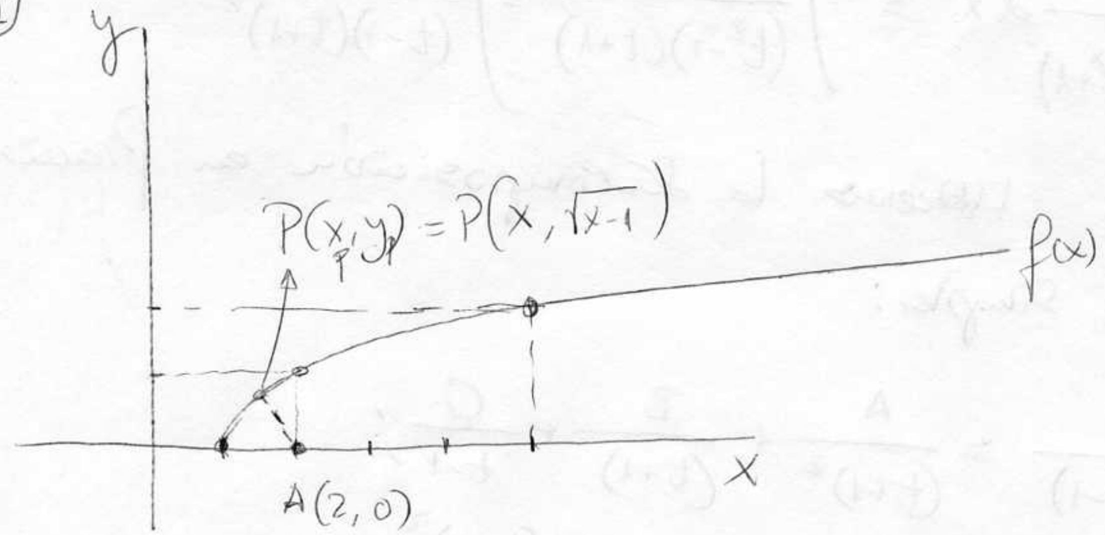
Así, $M(3, 1, 3)$ nos permite hallar las coordenadas de $A'(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A(-3, 1, 6) \\ A'(a_1, a_2, a_3) \end{array}\right\} M = \frac{AA'}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-3 + a_1}{2} = 3; \; a_1 = 9 \\ \dfrac{1 + a_2}{2} = 1; \; a_2 = 1 \\ \dfrac{3 + a_3}{2} = 6; \; a_3 = 9 \end{cases}$$

Por tanto A', simétrico de A respecto a r, tiene de coordenadas $\boxed{A'(9, 1, 9)}$

OPCIÓN B

1



$$d(A,P) = |\vec{AP}| = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x-1})^2} = \sqrt{x^2-4x+4+x-1} =$$

$$\vec{AP} = \left(x-2, \sqrt{x-1}\right) \qquad = \boxed{\sqrt{x^2-3x+3} = d(A,P)} \ (I)$$

La distancia desde A(2,0) a un punto P cualquiera situado sobre la función dada es la función a optimizar. Por tanto, derivamos respecto a x la d(A,P) de la exp. I e igualamos a cero:

$$\frac{d\left(d(A,P)\right)}{dx} = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+3}} = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \ \boxed{x = 3/2}$$

Por tanto, el punto P será:

$$x_p = \frac{3}{2}; \quad y_P = \sqrt{\frac{3}{2}-1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad P\left(3/2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

que obviamente será el más cercano, pues la máxima distancia es infinita si desplazamos P a lo largo de f(x).

2) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^{2x}-1)(e^x+1)}\,dx = \int \frac{dt}{(t^2-1)(t+1)} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)^2} =$

$\left.\begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array}\right]$ Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t+1)^2(t-1)} = \frac{A}{(t+1)^2} + \frac{B}{(t+1)} + \frac{C}{t-1};$$

$$1 = A(t-1) + B(t+1)(t-1) + C(t+1)^2$$

$t=1 \Rightarrow 1 = C \cdot 4;\ \boxed{C = \frac{1}{4}}$

$t=-1 \Rightarrow 1 = A(-2);\ \boxed{A = -1/2}$

$t=0 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{2}(-1) + B(1)(-1) + \frac{1}{4}\cdot 1;\ \boxed{B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4}}$

$$= \int \frac{-1/2}{(t+1)^2}dt + \int \frac{-1/4}{t+1}dt + \int \frac{1/4}{t-1}dt = -\frac{1}{2}\int (t+1)^{-2}dt -$$

$$= \frac{1}{4}Ln(t+1) + \frac{1}{4}Ln(t-1) = \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{4}Ln\frac{t-1}{t+1} + C =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2(e^x+1)} + Ln\sqrt[4]{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)} + C}$$

3) $A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) λ? / $A^2 + 3A$ sea singular

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+1)^2 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3\lambda+3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^2+3A = \begin{pmatrix}\lambda^2+2\lambda+1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\lambda+3 & 0\\ 3 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda^2+5\lambda+4 & 0\\ 3+\lambda & -2\end{pmatrix}$$

$$|A^2+3A| = -2(\lambda^2+5\lambda+4) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-4\end{cases}}$$

b) $\lambda = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$AX + A = 2I; \quad A(X+I) = 2I;$$

$$A^{-1}\cdot A(X+I) = A^{-1}\cdot 2I$$

$$X+I = 2A^{-1}$$

$$\boxed{X = 2A^{-1} - I}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\mathrm{Adj}(A^t) = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$|A| = -1; \quad A^t = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = A} \Rightarrow X = 2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix}}$$

Comprobación: $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix} = 2I \Rightarrow \text{OK}$$

4) $A(1,0,-1)$ y $B(2,1,0)$ $\quad r \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x \quad +z=2 \end{cases}$

a) $\pi \begin{cases} // r \Rightarrow \vec{u_r} \subset \pi \\ A \in \pi \\ B \in \pi \end{cases} \Big\} \ \vec{v} = \vec{AB} \subset \pi \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (1,1,1)}$

$r \equiv \begin{cases} x+y \quad =1 & \vec{N_1}\ (1,1,0) \\ x \quad +z=2 & \vec{N_2}\ (1,0,1) \end{cases} \quad \vec{u_r} \sim \vec{N_1} \times \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \vec{i} - \vec{k} - \vec{j} = \boxed{(1,-1,-1) = \vec{u_r}}$

$\pi(A, \vec{u_r}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(x-1) - 2y + 2(z+1) =$

$= \quad + z+1 - y + z+1 + \quad -y = -2y + 2z + 2 = 0;$

$-2y + 2z + 2 = 0; \quad -y + z + 1 = 0$

$$\boxed{\pi \equiv \ +y - z - 1 = 0}$$

b) $P(1,2,1) \in \pi \Rightarrow \ +2-1-1 = 0 \Rightarrow P \in \pi$

$Q(3,4,1) \notin \pi \Rightarrow \ +4-1-1 \neq 0$

Por tanto la recta que pase por P y Q es secante con π, siendo el punto de intersección P.